Solution 11 :

1°/

a) On pose $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$)

$\bar{z} + z + 4 = 0 \Leftrightarrow x - iy + x + iy + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0$

D : $x = -2$

b) $d(M,D) = |x + 2| = \frac{1}{2}|z + \bar{z} + 4|$

2°/ $M(z) \in (E) \Leftrightarrow \left|\frac{z - 1 - i}{z + \bar{z} + 4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,D)} = \frac{\sqrt{2}}{2} = e$

On a : $0 < e < 1$ d'où (E) est une ellipse d'excentricité $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(D est une directrice de (E) ; F est l'un de ces foyers)

b) On a : O (0,0) $\in$ (E) en effet :

$$\left|\frac{z_0 - 1 - i}{z_0 + \bar{z}_0 + 4}\right| = \frac{|1 + i|}{|4|} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

D'où $O \in (E)$.